η-multiplier の除外値について(保型形式とその周辺)

AUTHOR(S):

斎藤, 裕

数理解析研究所講究録
617巻 1987年 18-24

η-multiplier の除外値について

京大教養 齋藤裕 (Hiroshi Saito)

§1. 問題

除外値の問題は、Dedekind 和の研究の中で生じたものであるが、ここでは Dedekind 和にはあまり触れずに解説することにする。問題の歴史的経緯及び Dedekind 和との関係については、文献[1] §1 を御参照下さい。

$\eta(z)$ $(\mathrm{Im}\, z>0)$ で、複素上半平面上のよく知られた関数

$$\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \quad q = e^{2\pi i z}$$

を表す。$SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、1 の 24 乗根 $\varepsilon(\sigma)$ が

$$\eta(\sigma z) = \varepsilon(\sigma)(cz+d)^{1/2}\eta(z)$$

で定まる。$(cz+d)^{1/2}$ は $-\pi/2 \le \arg(cz+d)^{1/2} < \pi/2$ ととる。$\varepsilon(\sigma)$ が表題の η-multiplier であるが、ここでは $\varepsilon(\sigma)$ の代りに $\varepsilon(\sigma) = e^{2\pi i\, l(\sigma)/24}$ を満たす $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$

の元 $l(\sigma)$ を考えることにする。$\log \eta(z)$ の分枝を

$$\log \eta(z) = \frac{\pi i z}{12} - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{2\pi i m n z}$$

で定めると、$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、整数 $\nu(\sigma)$ が決まり、

$$\log \eta(\sigma z) = \log \eta(z) + \frac{1}{2} \log(cz+d) + \frac{\pi i}{12} \nu(\sigma)$$

が成り立つ。$\log(cz+d)$ は $-\pi \leq \arg \log(cz+d) < \pi$ と定める。$l(\sigma)$ と $\nu(\sigma)$ の間には関係

$$l(\sigma) \equiv \nu(\sigma) \pmod{24}$$

が成り立つ。

以下 $tr(\sigma) > 2$ を満たす σ に対して $l(\sigma)$, $\nu(\sigma)$ の値を考察する。このような σ に対して $\nu(\sigma)$ は、従って $l(\sigma)$ も $SL_2(\mathbb{Z})$ の共役類の不変量であることがわかる。さて、$tr(\sigma)$ も共役類の不変量であるが、ν（あるいは l）と tr は独立か、完全に独立でなければどの程度独立かというのがここでの問題である。

これについては Dedekind 和の考察から次の基本合同式が成り立つことがわかる。

基本合同式

$(\nu(\sigma), 4) = 1 \Rightarrow tr(\sigma) \equiv 0 \pmod 2$,

$(\nu(\sigma), 4) = 2 \Rightarrow tr(\sigma) \equiv 1 \pmod 4$, $tr(\sigma)/2 \equiv 1 \pmod 4$

または $tr(\sigma)/2 \equiv 7 \pmod 8$,

$(\nu(\sigma), 4) = 4 \Rightarrow tr(\sigma) \equiv 3 \pmod 4$, $tr(\sigma)/2 \equiv 3 \pmod 4$

または $tr(\sigma)/2 \equiv 1 \pmod 8$,

$(\nu(\sigma), 3) = 1 \Rightarrow tr(\sigma) \equiv \pm 1 \pmod 3$.

$(\nu(\sigma), 3) = 3 \Rightarrow tr(\sigma) \equiv 0 \pmod 3$ または

$tr(\sigma) \equiv \pm 2 \pmod 9$.

整数 ν に対して W_ν を

$W_\nu = \{ s > 2 \mid \nu$ に対する基本合同式を満たす$\}$

と定義する。例えば $W_1 = \{ s > 2 \mid 2 \mid s,\ s \equiv \pm \pmod 3 \}$, $W_{-3} = \{ s > 2 \mid 2 \mid s,\ s \equiv 0 \pmod 3$ または $s \equiv \pm 2 \pmod 9 \}$ である。$\nu \equiv \nu' \pmod{24}$ ならば $W_\nu = W_{\nu'}$ であるから $\ell \equiv \nu \pmod{24}$ の時, $W_\ell = W_\nu$ としてよい。

さて $\nu(\sigma) = \nu$（あるいは $\ell(\sigma) = \ell$）となるのが存在するための条件は $tr(\sigma) \in W_\nu$（あるいは $tr(\sigma) \in W_\ell$）だけであろうか。そこで次の定義をする。

定義 1. $v \in \mathbb{Z}$ に対し，$s \in W_v$ が除外値

$\Longleftrightarrow$ $v(\sigma)=v,\ tr(\sigma)=s$ を満たす σ が存在しない

2. $l \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ に対し，$s \in W_l$ が除外値

$\Longleftrightarrow$ $l(\sigma)=l,\ tr(\sigma)=s$ を満たす σ が存在しない．

$\tilde{S}_v$，S_l で除外値の集合を表せば

$$S_l = \bigcap_{v \equiv l (mod\, 24)} \tilde{S}_v$$

である。例えば $v=-3$ に対しては，

$$24,\ 34,\ 88,\ 214,\ 304,\ 344,\ 394,\ 1060,\ 1924,$$

は $\tilde{S}_{-3}$ に含まれる。問題は $\tilde{S}_v$，S_l を決めることに帰着された。

§2. 予想と結果

除外値の集合 S_l については，浅井氏により次の事実が予想され（[2]），筆者により証明された（[4]）。結果を述べるために記号を導入する。6 の約数 $a\ (>0)$ と $\lambda = \pm 1$ に対し

$$A_{\lambda a} = \{ s = an^2 + 2\lambda \mid s > 2,\ p \mid n \Rightarrow p=2,3,\text{又は} \left(\tfrac{\lambda a}{p}\right) = 1 \}$$

と置き、$A_{\lambda a}^{(*)}$ で、$A_{\lambda a}$ の元で次の条件 (a) ~ (g) の部分集合 * を満たすもの全体を表す。

(a) $s \not\equiv 2 \mod 64$　　(d) $s \equiv 2 \mod 9$

(b) $s \not\equiv 14 \mod 16$　　(e) $s \equiv 7 \mod 9$

(c) $s \not\equiv 46 \mod 64$　　(f) $s \equiv 7 \mod 27$

(g) $s \equiv 20 \pmod{27}$

例えば、$A_3^{(c)} = \{3n^2+2 \mid n \equiv \pm 6, \pm 22 \pmod{48},$
$p \mid n \Rightarrow p = 2 \text{ or } p \equiv \pm 1 \pmod{12}\}$ である。これらの記号を用いて、結果は次のように述べられる。

定理　$S_l = S_{-l}$ で S_l $(0 \le l \le 12)$ は次のように与えられる。

$S_0 = A_{-1}^{(a,d)}$　　$S_7 = A_{-2}^{(e)} \cup A_{-6} \cup A_6 \cup E$

$S_1 = A_{-2}^{(e)}$　　$S_8 = A_{-1}^{(a)}$

$S_2 = S_6 = \phi$　　$S_9 = A_{-2} \cup A_2^{(g)}$

$S_3 = A_2^{(e)}$　　$S_{10} = A_{-3}^{(b)} \cup A_3^{(c)}$

$S_4 = A_1^{(a,d)}$　　$S_{11} = A_2 \cup A_{-6} \cup A_6$

$S_5 = A_2 \cup E$　　$S_{12} = A_{-1}^{(a,f)} \cup A_1^{(a)}$

ここで $E = A_{-1} \cap A_3$.

これにより S_ℓ は完全に決定されたが、$\tilde{S}_\nu$ については、長坂氏により次のことが予想されている（[3]）。

予想（長坂）

$$\tilde{S}_{-3} = S_{-3} \cup \{24, 88, 214, 304, 344\}$$

つまり $\tilde{S}_{-3}$ は S_{-3} と例外的な5つの数から成り立っているというのであるが、包含関係 $\supset$ は明らかであるが、逆の包含関係が示されていない。講演後、浅井氏より次の指摘を受けました。$\tilde{S}_\nu$ は S_ℓ, $\ell \equiv \nu \pmod{24}$, と有限個の例外的な数からなり、この例外的な数の個数は、ν とともに増大するようである。

また長坂氏は，$s \notin \tilde{S}_\nu$ に対し

$$\widetilde{\mathrm{ord}}_\nu(s) = \min\left\{ c \;\middle|\; \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ c > 0,\ \mathrm{tr}(\sigma) = s,\ \nu(\sigma) = \nu \right\}$$

という量を考え，$\widetilde{\mathrm{ord}}_\nu(s)$ の大きさについて、いくつかの現象を観察して予想を提出している。それらについてここでは触れないが、$s \notin S_\ell$ に対して

$$\mathrm{ord}_\ell(s) = \min\left\{ c \;\middle|\; \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ c > 0,\ \mathrm{tr}(\sigma) = s,\ \ell(\sigma) = \ell \right\}$$

と定義すると、例えば、次のことが示される。

命題 pを奇素数とし, $s = 2(p^2+1) \notin S_{-3}$ とする。

(1) $tr(\sigma) = s$, $\nu(\sigma) = -3$ ならば $\sigma \in \Gamma(p)$.

(2) $p \equiv 3 \pmod 8$ ならば, $p \leq ord_{-3}(s) \leq 3p$.

文献

[1] 浅井哲也, 長坂千秋, 齋藤裕, Dedekind和の除外値について, 数理研講究録572.

[2] T.Asai, The multiplier system of eta function and the traces unimodular matrices, "Number theory and Combinatorics, Japan 1984", World Scientific Publishing, 1985.

[3] Ch.Nagasaka, A conjecture on the exceptional values of the Dedekind symbol, J.Number Theory 24(1986),174-180.

[4] H.Saito, On missing trace values for the eta multipliers, to appear in J.Number Theory.